

Лекція № 1.3

Тема лекції: Пара сил, момент пари, обертальна дія

Основні поняття та положення: пара сил, обертаюча дія пари на тіло. плече пари, момент пари, умова рівноваги тіла під дією системи пар сил.

План лекції:

1. Пара сил. Обертаюча дія пари на тіло. Плече пари, момент пари, знак моменту.
2. Еквівалентність пар. Основні властивості пар.
3. Додавання пар. Умова рівноваги тіла під дією системи пар сил.

Література:

4. Е. М. Никитин. Теоретическая механика для техникумов. — М.: Наука, 1988 — 336с.

2.Д.В. Чернилевский, Лаврова В.Е., Романов В.А. Техническая механика, - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.- 544 с.

Зміст лекції

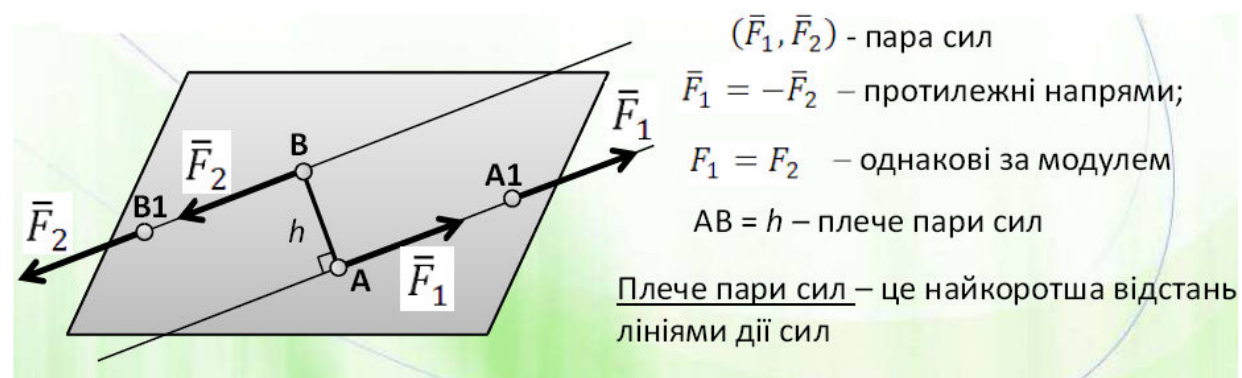
1. Пара сил. Обертаюча дія пари на тіло. Плече пари, момент пари, знак моменту.

Запам'ятайте:

***Парою сил** називають систему двох рівних за модулем сил, направлених вздовж паралельних прямих у протилежних напрямках.*

Площина, в якій розміщені сили пари – це площина дії пари сил.

Запам'ятайте:



Запам'ятайте:

Сили пари не складають зрівноважену систему сил, бо не мають спільної лінії дії, та не зводяться до рівнодіючої, так як їх геометрична

сума дорівнює нулю. Дія пари сил зводиться до обертового ефекту, який характеризується **моментом пари**.

Необхідно знати:

Алгебраїчний момент пари – це взята з відповідним знаком величина, яка дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече пари:

$$M = M(F, F') = \pm F \times d. \quad (27)$$

Алгебраїчний момент пари сил буде додатним, якщо пара сил намагається обертати тіло проти ходу годинникової стрілки.

Відповідно до визначення, алгебраїчний момент пари сил чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на силах пари (рис. 31):

$$M = M(F, F') = \text{пл } ABCD = 2 \text{пл.} \Delta ABC = 2 \text{пл.} \Delta ABD.$$

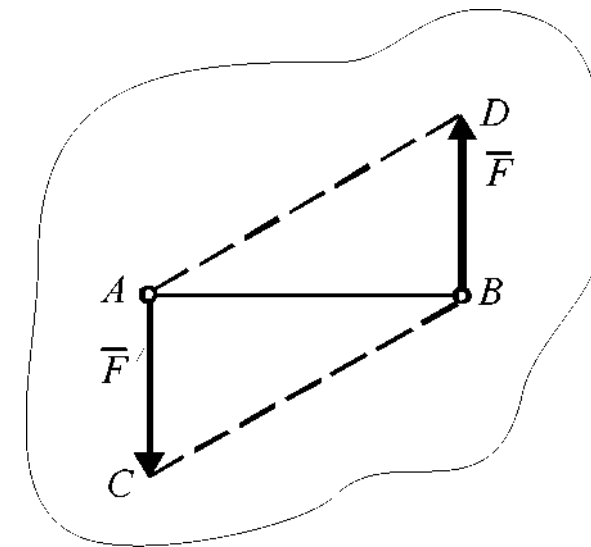


Рисунок 31

Необхідно знати:

Векторним моментом пари сил називається вектор M , модуль якого дорівнює добутку модуля однієї із сил на плече пари, і який напрямлений перпендикулярно площині дії пари в той бік, звідки напрямок повороту тіла під дією пари видно проти ходу годинникової стрілки (рис.32).

Із цього визначення можна встановити, що момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання другої сили, тобто

$$M = AB'F = M_A(F) \text{ або } M = BA'F' = M_B(F'). \quad (28)$$

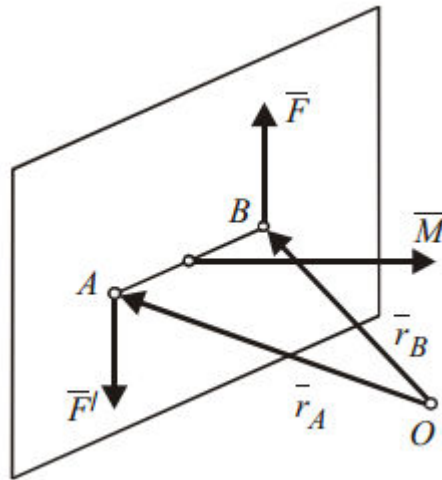


Рисунок 32

Покажемо справедливість висновку (теореми):

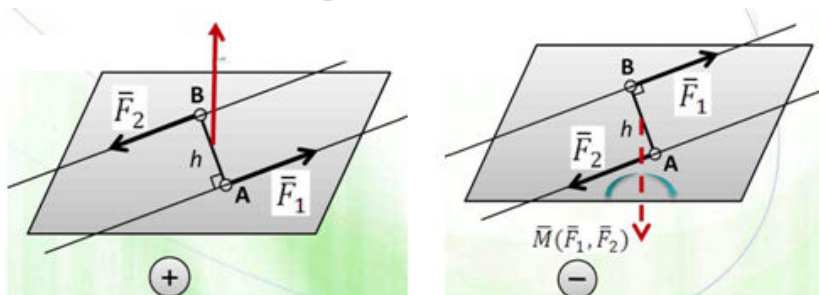
Запам'ятайте:

Сума моментів сил пари відносно будь-якої точки не залежить від положення цієї точки і дорівнює моменту пари сил.

Момент сили відносно точки вважається додатнім, якщо сила намагається повертати відносно точки проти напрямку годинникової стрілки, і від'ємним, якщо намагається повертати за напрямком стрілки годинника.

Пара сил не має рівнодійної, але сили пари намагаються обертати тіло, до якого вони прикладені.

Правила знаків



Запам'ятайте:

2. Еквівалентність пар. Основні властивості пар.

Еквівалентність пар сил

Дві пари сил називаються еквівалентними, якщо їх дії на тіло однакові.

Теорема 1. Не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати у площині дії, змінюючи величину сили пари і довжину плеча пари таким чином, щоб момент пари залишався незмінним.

Теорема 2. Дві пари сил, що лежать в одній або паралельних площинах і мають однакові за величиною, але протилежні за напрямом моменти, становлять систему пар сил, еквівалентну нулю.

Необхідно знати:

Властивості пар сил, що впливають з цих теорем:

1. Можна змінювати величину сил і плече пари, не змінюючи величину моменту і напрямок обертання.
2. Пару сил можна як завгодно переміщати у площині її дії.
3. Пару сил можна переміщати у паралельну площину даного тіла.

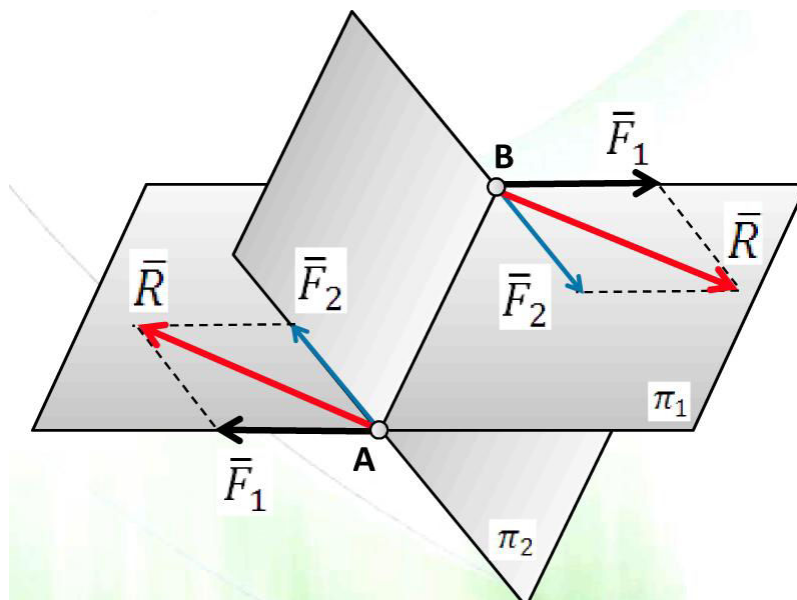
Всі ці властивості не змінюють ні величини, ні напрямку моменту пари, тому є еквівалентними перетвореннями.

Систему пар сил можна привести до найпростішого вигляду.

Необхідно знати:

Теорема про еквівалентність одній парі сил

Дві пари сил, що діють у різних площинах, еквівалентні одній парі сил з моментом, який дорівнює геометричній сумі заданих пар.



$(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$ - одна пара сил,
належить π_1

$(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$ - друга пара сил,
належить π_2

$$\overline{AB} = \bar{r}$$

Складаючи дві сили за правилом
паралелограма, одержуємо

рівнодійну
$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{R}$$

Визначаємо момент пари сил:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\bar{R}, -\bar{R}) &= \bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \\ &= \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2 = \bar{M}(\bar{F}_1, -\bar{F}_1) + \bar{M}(\bar{F}_2, -\bar{F}_2) \end{aligned}$$

Тобто, систему пар сил можна звести до однієї пари сил,
момент якої дорівнює геометричній сумі векторних моментів заданих пар.

3. Додавання пар. Умова рівноваги тіла під дією системи пар сил.

*Система пар сил, діючих на тверде тіло, еквівалентна одній парі сил,
векторний момент якої дорівнює геометричній сумі векторних моментів
всіх пар системи.*

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0$$

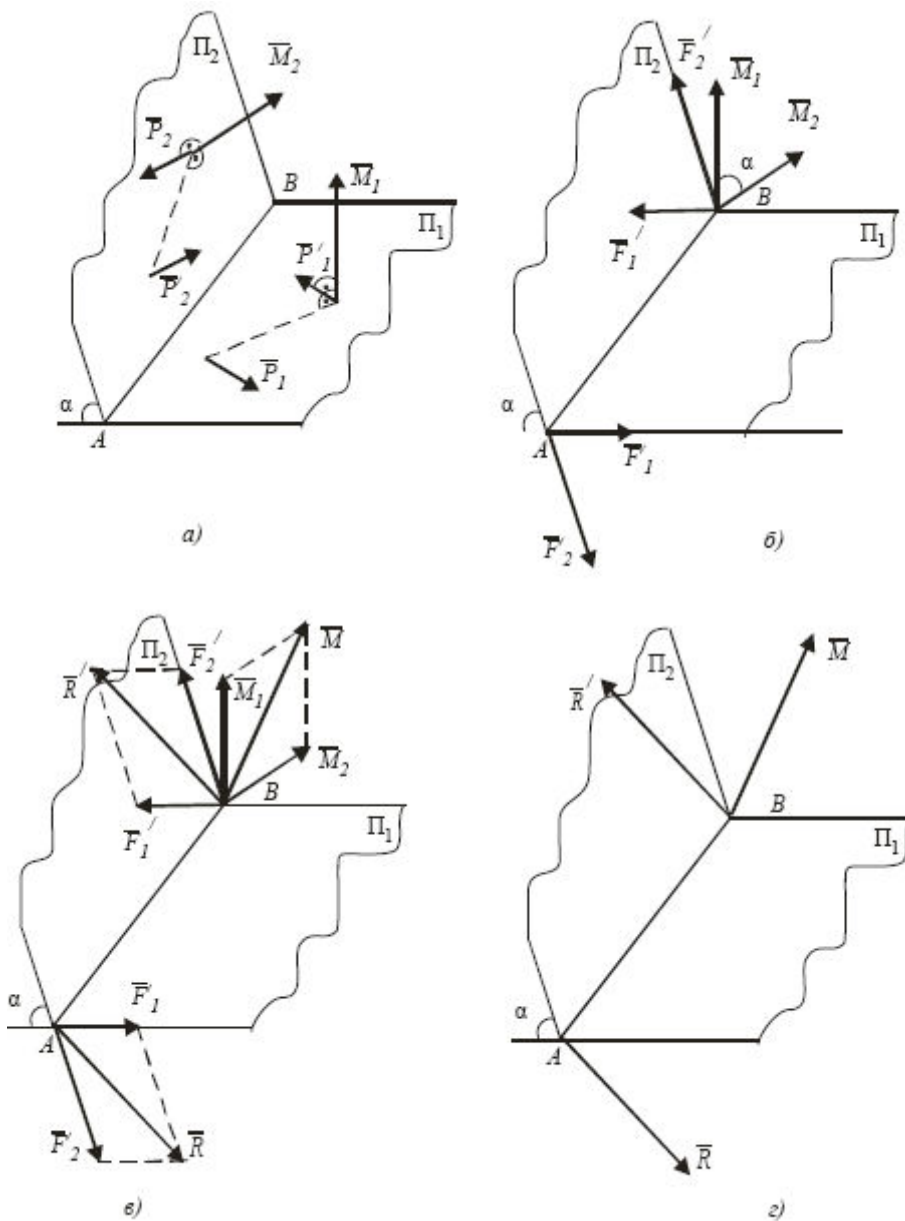


Рисунок 35

Розглянемо дві пари сил (P_1, P_1') та (P_2, P_2') , які лежать в площинах Π_1 і Π_2 , що перетинаються під деяким кутом α (рис. 35). Векторні моменти M_1 і M_2 цих пар сил направлені перпендикулярно до відповідних площин (рис. 35,а).

Відповідно до теореми про еквівалентність пар сил перенесемо розглядані пари сил в своїх площинах до лінії перетину площин, привівши їх до плеча AB , так, щоб моменти перетворених пар сил (F_1, F_1') та (F_2, F_2') були рівними моментам початково діючих пар сил (P_1, P_1') і (P_2, P_2') (рис. 35,б):

$$\overline{M}(P_1, P_1') = \overline{M}(F_1, F_1') = \overline{BA} \times \overline{F_1} = \overline{M}_1; \quad \overline{M}(P_2, P_2') = \overline{M}(F_2, F_2') = \overline{BA} \times \overline{F_2} = \overline{M}_2.$$

Складемо сили, прикладені в точці A та в точці B (рис. 35, в):

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}; \quad \overline{R}' = \overline{F_1'} + \overline{F_2'}.$$

Одержана результуюча пара сил (R, R') має момент

$$\bar{M} = \overline{BA} \times \bar{R} = \overline{BA} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \overline{BA} \times \bar{F}_1 + \overline{BA} \times \bar{F}_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2. \quad (30)$$

Отже, дві пари сил (P, P_1') і (P, P_2') з моментами M_1 і M_2 , які лежать в площинах, що перетинаються (рис. 35,а), можна замінити однією парою сил (R, R') (рис. 35,г) з моментом $M = M_1 + M_2$. У випадку розміщення пар сил в одній площині чи в паралельних площинах, коли векторні моменти пар сил паралельні між собою, векторне додавання моментів пар переходить в алгебраїчне додавання.

Якщо на тіло діє система пар сил з моментами $M_1, M_2, \dots, M_n$, то послідовно складаючи моменти пар, можна зробити висновок, що дана система пар еквівалентна одній парі сил з моментом

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k.$$

Необхідно знати:

Умови рівноваги системи пар сил

1. Механічна умова: для рівноваги системи пар сил необхідно і достатньо, щоб момент еквівалентної пари дорівнював нулю.

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0$$

2. Геометрична умова: для рівноваги системи пар сил необхідно і достатньо, щоб векторний багатокутник, побудований із векторів моментів усіх пар, був замкнений.
3. Аналітична умова: для рівноваги системи пар сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій векторів моментів усіх пар на осі вибраної системи координат дорівнювали нулю.

Для просторової:

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0.$$

Для плоскої:

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0$$

Контрольні питання:

1. Яку систему сил називають парою сил? Як визначається її момент?
2. Які перетворення пари сил не змінюють її дії на тіло?
3. Як складаються пари сил, що лежать в одній площині? У площинах, що перетинаються?
4. Які умови рівноваги системи пар сил?