

II Розділ. Опір матеріалів

Тема 2.1 Основні положення

1. Мета і завдання розділу «Опір матеріалів і його зв'язок з іншими розділами технічної механіки і спеціальними предметами».
2. Зовнішні сили (навантаження) їх класифікація. Внутрішні сили. Визначення внутрішніх сил (метод перерізів) |основні види деформацій, бруса напруження, повне, нормальне, дотичне|
3. Поняття про пружні і пластичні деформації. Розрахункова схема споруди. Опорні в'язі.
4. Допущення і обмеження прийняті в опорі матеріалів: однорідність, безперервність будови, пружність, ізотропність, дуже малі зміни форми і розмірів, лінійна залежність між силами і переміщеннями, принцип незалежності дії сил, гіпотеза плоских перерізів, гіпотеза Сен-Венана.
(Пункт: 3,4 - самостійно)

I Мета і завдання розділу

Основні вимоги до будь-яких споруд:

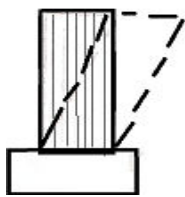
Надійність їх роботи – довговічність, безаварійність.

Для забезпечення безаварійності необхідно, щоб їх всі основні частини (елементи конструкцій) були міцні, жорсткі, стійкі.

Міцність – здатність витримувати навантаження без руйнування.

Жорсткість – здатність елементів витримувати навантаження не змінюючи їх розмірів і форм, або змінювати в межах допустимих норм.

Стійкість – здатність зберігати за період експлуатації форми рівноваги надану їм при виготовленні.



- відхилення



— випучування

—→ втрата стійкості

Економічність – мінімум витрат на спорудження і виготовлення.

Для забезпечення міцності необхідно:

I-Варіант. —→ збільшувати поперечний переріз елементів конструкцій.
не економічно

II-Варіант. —→ в багатьох випадках можна застосувати більш раціональні форми поперечного перерізу, зменшуючи вагу.

Основна задача опору матеріалів – розробка методів, які дозволяють підібрати:

1. надійні і економічні розміри поперечних перерізів елементів конструкцій;
2. найбільш доцільну їх форму.

Зворотна задача – перевірити достатність, прийнятих розмірів елементів існуючих конструкцій – перевіряти їх міцність, жорсткість, стійкість.

Опір матеріалів – наука, яка займається розрахунками елементів конструкцій на міцність, жорсткість, стійкість.

Опір матеріалів – один з розділів будівельної механіки, → сукупність наук про способи розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість.

Розділи опору матеріалів

- теорія пружності;
- теорія пластичності;
- статика
- динаміка

→ мости

Додому: §2 Н.С. Улитин:
Опір матеріалів.

II Зовнішні сили:

- пара сил (моменти / м(Н·м))
- зосереджені сили F (н)
- рівномірно розподільна сила q (н/л)
- крутячий момент.

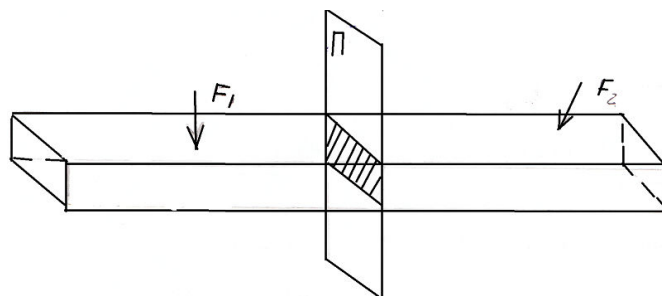
Під дією зовнішніх сил виникають внутрішні сили.

Внутрішні сили – це сили, які виникають між частинками тіла при його деформації – являється причиною руйнування.

Величину внутрішньої сили можна визначити методом перерізів. А саме:

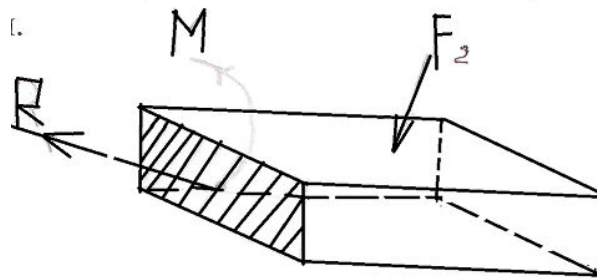
1. – проводимо переріз площиною перпендикулярною до осі стержнів.
2. – одну із частин стержня (праву чи ліву) відкидаємо.
3. – дію відкинутої частини заміняємо силою (реакціями), яка є рівнодією всіх внутрішніх сил, які діють в перерізі.
4. – складаємо рівняння рівноваги для визначення величини внутрішніх сил.

Є балка, перерізаємо площиною.

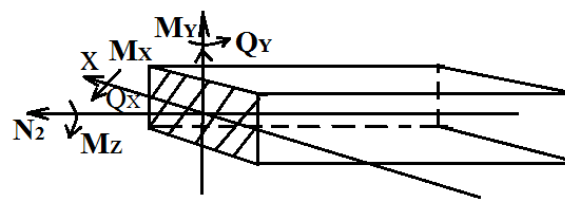


Відкинуту частину для забезпечення рівноваги заміняємо:

- головним вектором;
- головним моментом.



Основні види деформацій



Q_x, Q_y – поперечні (перерізуючі) сили

N_z – поздовжня сила

} проекції головного вектора

Головний момент розкладаємо на три складові відносно осей .

M_x, M_y – згинаючі моменти

M_z – крутний момент

В залежності від того, які внутрішні параметри (зусилля) діють в перерізі розрізняють наступні види деформацій: якщо діє N_z – розтяг (стиск)

- $M_z \rightarrow$ кручення (коли діє крутний момент тоді маємо деформацію кручення)
 - $Q_x, Q_y \rightarrow$ зріз
 - $M_x, M_y \rightarrow$ чистий згин
 - $M_x, Q_y \rightarrow$ поперечний згин і т.д.
- прості види деформацій.

Будують складні види:

- згин і кручення;
- стиск і згин.*/

Напруження – це відношення внутрішнього силового фактору до площі поперечного перерізу.

Напруження – величина векторна і її можна розкласти на 2 складові.

І Напруження, яке діє в площі перерізу називається **дотичним** (τ)

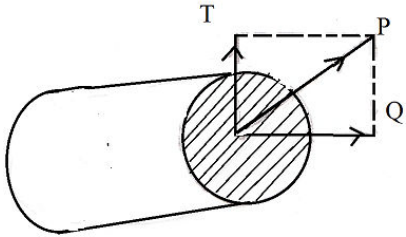
II Напруження яке перпендикулярне до площі перерізу – **нормальне** (σ)

Одиниці вимірювання – Па , або $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

Більша одиниця – МПа (мегапаскаль)

$$1\text{МПа} = 10^6 \text{ Па} = \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \left[\frac{10000\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$$

Повне напруження

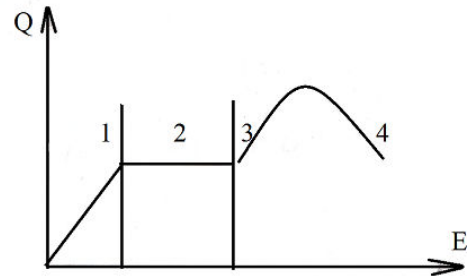
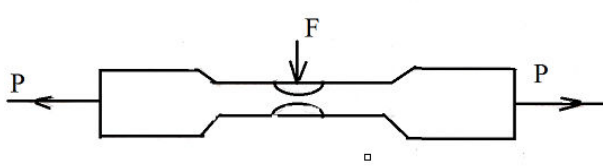


$$p = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$$

III

Самостійно:

- Пружні і пластичні деформації.
- Пластичні (залишкові).
- Пружні – відновлюють попередній стан.



$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ (Па)} - \text{напруга сігма}$$

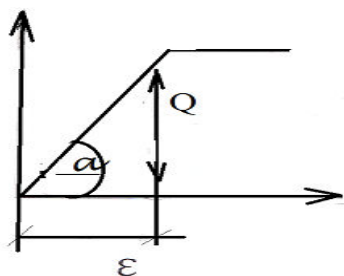
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} - \text{епсілон відносна деформація}$$

Δl – абсолютна деформація

$$\sigma = E\varepsilon$$

1. Закон Гука – лінія пружності деформація прямо пропорційна напрузі.
2. Площадка текучості, не збільшуємо зусиль, а метал розтягується (тече).
Перекристалізація в металі виникає і метал знову набирає стійкість.
3. Прикладаємо зусилля.
4. Рветься.

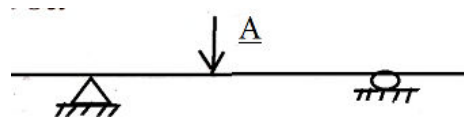
$$\text{tg } \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \text{ модуль пружності}$$



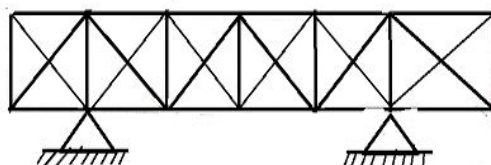
модуль Юнга

Розрахункова схема споруди

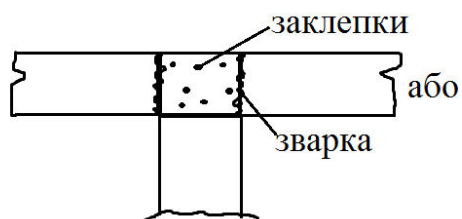
- балка



- ферми



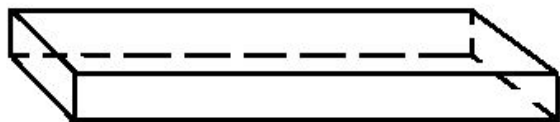
— зварні елементи
приймаємо шарнірно рухому (умовно)



— пластина



— брус



— стержень



Пластичні деформації – ця деформація при якій після зняття навантаження має місце залишкова деформація.

Пружні – такі деформації, коли після зняття навантаження зразок набуває своїх попередніх розмірів.

**Основні гіпотези і припущення, які використовуються
в опорі матеріалів.**

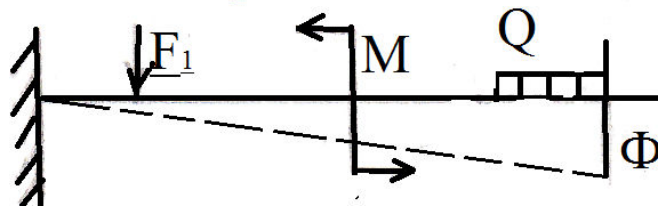
1. Гіпотеза однорідності – в усіх точках властивості тіла однакові.
2. Гіпотеза ізотропності – властивості матеріалу однакові в усіх напрямках.
3. Гіпотеза малості деформації.

Деформації – це величини I (Δl) порядку малості порівняно з розмірами тіла

$$\Delta l = l_1 - l_2 \ll l$$

Величинами 2-го порядку малості Δl^2 нехтують.

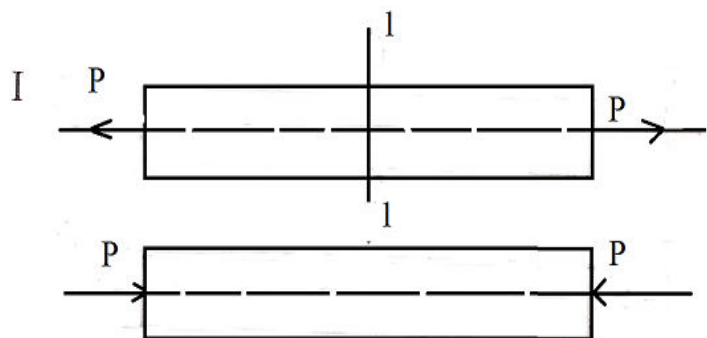
4. Принцип незалежності дії сил, загальна деформація дорівнює сумі деформацій, які викликають окремі сили.



Тема 2.2 Розтяг і стиск

Зайняття №1

1. Поздовжня сила. Центральний розтяг прямого бруса.
2. Нормальне напруження в поперечних перерізах бруса.
3. Побудова епюр поздовжніх сил і нормальних напруження

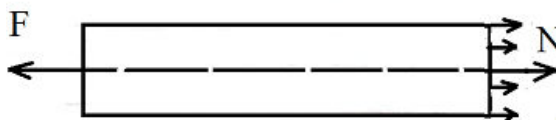


Прикладені сили викликають деформацію розтягу. Довжина зменшується деформація стиску.

Довжина зменшується. Її можна розглянути, як від'ємне видовження. Це дає можливість вивчати розтяг і стиск сукупно і всі висновки отримані для розтягу приймати і для стискання. Власна вага не враховується.

Для визначення внутрішніх сил застосовуємо метод перерізів:

1. Проводимо переріз I-I площиною перпендикулярною до осі стержня.
2. Одна з частин (праву) відкидаємо.



3. Дію відкинутої частини заміняємо внутрішніми силами пружності, які в даному випадку перпендикулярні до перерізу. Їх можна замінити рівнодійною (N).

*Рівнодійна внутрішніх сил пружності в поперечному перерізі бруса називається **поздовжньою силою N**.*

4. Складаємо рівняння рівноваги для визначення величини внутрішніх сил.
Поздовжня сила N = алгебраїчній сумі проекцій на вісь бруса всіх зовнішніх сил які діють по одну сторону перерізу (по ту, що залишилась).

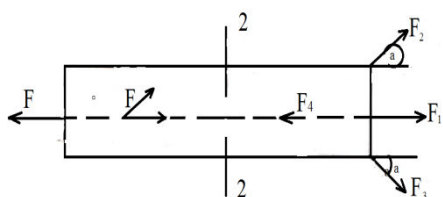
$$N=P$$

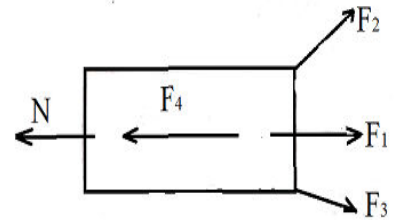
$$N-P=0$$

$$-F_4+F_1+F_2\cos\alpha+P_3\cos\alpha$$

$$-N=0$$

$$N=P_1+(P_2+P_3)\cos\alpha-P_4$$





Гіпотеза Бернулі – (гіпотеза плоских перерізів)

Плоскі і нормальні до осі бруса перерізи до деформацій, залишаються плоскими після деформацій.

По-скільки нормальні напруження розподілені рівномірно, то

$$N = \sigma F \quad \text{поздовжня сила} = \text{добутку нормального напруження на площу.}$$

Але $N=P$, значить $P = \sigma F$, звідки $\sigma = \frac{P}{F}$

Коли по осі бруса буде прикладено декілька сил $N_1; N_2; \dots N_n$, тоді $\sigma = \frac{P}{F}$.

Коли N з $\sigma = \frac{N}{F}$

(+) – розтяг

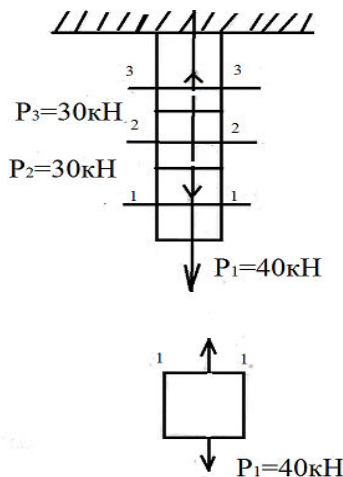
(-) – стиск

Приклад:

Прямий брус знаходиться під дією сил $P_1; P_2; P_3$;

Побудувати епюри поздовжніх сил N і нормальних напружень σ . Коли $P_1 = 40 \text{ кН}$; $P_2 = 30 \text{ кН}$; $P_3 = 90 \text{ кН}$; $F = 8 \text{ см}^2$. Вагою бруса знехтувати.

Розв'язок:



1. Розбиваємо брус на окремі ділянки. Межа кожної ділянки – переріз де прикладені сили (три ділянки)

2. Застосовуємо метод перерізів.

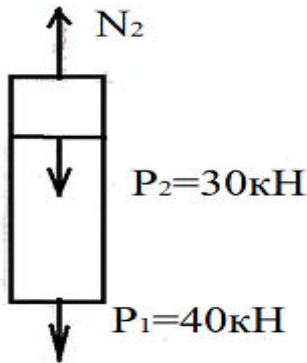
Метод РОЗУ | розрізаємо, одкидаємо,
| заміняємо, урівнюємо

3. $\sum Y = N_1 - P_1 = 0$

$$N_1 = P_1 = 40 \text{ кН} = 0,04 \text{ Мн}$$

Поздовжня сила в перерізі I-I буде розтягнутою, так як значення N_1 – додатне те ж значення поздовжньої сили буде в будь-якому перерізі I-ї ділянки.

4. Відкидаємо верхню частину бруса від перерізу 2-2. Складаємо рівняння рівноваги для частини, що залишилась і визначаємо величину поздовжньої сили в перерізі II ділянки.



$$\sum Y = 0$$

$$\begin{aligned} N_2 - P_2 - P_1 &= 0 \\ N_2 = P_2 + P_1 &= 30 + 40 = 70 \text{ кН} \\ &= 0,07 \text{ Мн.} \end{aligned}$$

5. На III ділянці, в перерізі 3-3

$$N_3 = P_1 + P_2 - P_3 = 40 + 30 - 90 = -20 \text{ кН} = -0,02 \text{ Мн.}$$

6. Визначаєм величину нормальних напружень;

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

F- площа

$$\sigma_I = \frac{0,04 \text{ Мн}}{0,0008 \text{ м}^2} = 50 \text{ Мн/м}^2 = 500 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_{II} = \frac{0,07 \text{ Мн}}{0,0008 \text{ м}^2} = 87,5 \text{ Мн/м}^2 = 875 \text{ кг/см}^2$$

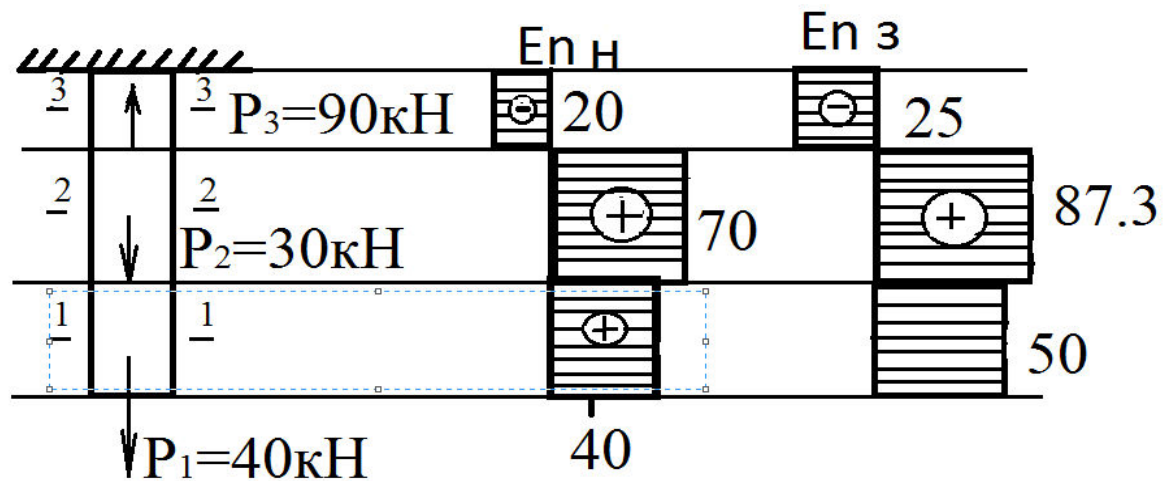
$$\sigma_{III} = \frac{-0,02 \text{ Мн}}{0,0008 \text{ м}^2} = -25 \text{ Мн/м}^2 = -250 \text{ кг/см}^2$$

7. Вибираємо масштаб і будуємо епюри по осі бруса

Епюра N

Епюра σ

(Мал.1)



Відомі сили і матеріал (ст.3)

Рішення

(Улитин «Опір матеріалів»)

По табл. 6 ст.40, вибираємо допустиме напруження

$$1. [\sigma] = 160 \text{ Мн/м}^2 \text{ або } 1,6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$$

2. Будуємо епюри сил (мал.1)

3. Вибираємо найбільшу силу

4. Знаходимо діаметр стержня

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}; \quad F \geq \frac{N_{max}}{[\sigma];}$$

$$\frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}; \quad d \geq \sqrt{\frac{4N_{max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.07}{3.14 \cdot 160}} = 0.024 \text{ м} = 2,4 \text{ см.}$$

Тема 2.2 Розтяг і стиск

Зайняття №2

- 1.Поздовжня деформація при розтязі (стиску). Закон Гука.
- 2.Модуль поздовжньої пружності. Визначення переміщення поперечних перерізів.
3. Жорсткість перерізів бруса при розтязі (стиску).
4. Поперечна деформація. Коефіцієнт поперечної деформації. (Коефіцієнт Пуансона). Вплив власної ваги бруса.

Що таке пружні(відновлюють поперечний стан) деформації після зняття навантаження зразок набуває попередніх розмірів.

Пластичні (залишкові) після зняття навантаження має місце залишкова деформація.



Збільшення довжини бруса наз. **абсолютним видовженням**, а зменшення довжини – **абсолютним вкороченням**, позначається Δl (м).

Величина Δl залежить від довжини бруса не дає загального уявлення про значення поздовжньої деформації. Тому за характеристику деформацій розтягу і стиску приймається величина відносної деформації.

Відносним видовженням (вкороченням) – називається відношення величини абсолютного видовження (вкорочення) до початкової довжини бруса.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

або $\varepsilon\% = \frac{\Delta l}{l} * 100\%$

Для розв'язування задач важливо встановити зв'язок між лінійними переміщенням і силами, які його викликали

видовження Δl пропорція:

$$(1) \quad \Delta l = \frac{p * l}{E * F}$$

– силі P ,

– довжині l ;

Закон Гука (Т.2.1)

Зворотньопропорційна :

– площі перерізу,
-пружності.

Добуток: E – модуль пружності.

III $E * F \longrightarrow$ жорстокість (здатність тіла опиратись деформаціям) – жорсткість перерізу бруса при розтязі(стисканні).

Поділимо обидві частини формули, отримаємо

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF},$$

але

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon,$$

тоді :

$$\varepsilon = \frac{P}{EF}$$

але

$$\frac{P}{F} = \sigma, \text{ тоді}$$

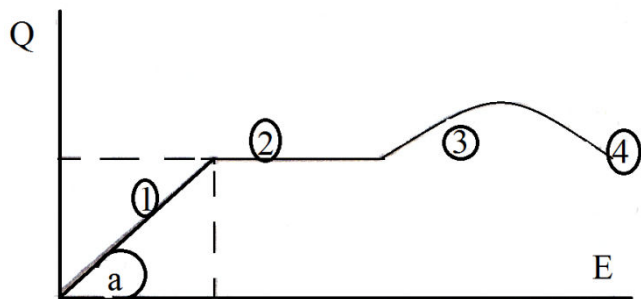
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \varepsilon E - \text{математично виражений закон Гука}$$

II $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ – модуль пружності – відношення нормального напруження до відповідного йому відносного видовження.

E – вимірюється в Н/м^2 ; МН/м^2

Задача Визначити абсолютне і відносне видовження круглого сталюого стержня



$d = 10\text{мм}$, $C = 5\text{м}$, який розтягується силою $P = 49\text{кН}$, $\sigma_{\text{проп}} = 200\text{МН/м}^2$,

$E = 2 * 10^5\text{МН/м}^2$. Вагою нехтуємо.

Границя пропорційності – найбільше напруження до якого деформації змінюються прямо пропорційно напруженням.

Модуль поздовжньої пружності.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$E = 2 * 10^5\text{МН/м}^2$$

Розв'язок

1. Закон Гука працює в області пропорційності. Опір матеріалів працює в межах закону Гука (4 гіпотеза). Вияснимо чи не перевищує дійсне напруження в поперечному перерізі стержня границі пропорційності його матеріалу.
2. Знаходимо площу перерізу стержня.

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 * 1.6^2}{4} = 2.01 \text{ см}^2 = 201 * 10^{-6} \text{ м}^2$$

3. Знаходимо напруження в поперечному перерізі стержня

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{0.04}{201 * 10^{-6}} = 199 \text{ Мн/м}^2$$

$$199 < \sigma_{\text{пп}} = 200 \text{ Мн/м}^2$$

$$1999 < 2000 \text{ кг/см}^2$$

Дійсне напруження не перевищує границі пропорційності застосовуємо закон Гука.

$$\Delta l = \frac{P * l}{EF} = \frac{0.04 * 5}{2 * 10^5 * 201 * 10^{-6}} \approx 0.005 \text{ м (0.5 см)}$$

4. Знаходимо величину відносного видовження

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.005}{5} = 0.001, \text{ або } 0,1\%.$$

Самостійно (задача)

Визначити нормальне напруження в поперечному перерізі розглянутого сталюого стержні довжиною 4м. якщо його абсолютне видовження $\Delta l = 2 \text{ мм}$;

$$E = 2 * 10^5 \text{ Мн/м}^2$$

Розв'язок

Розтягуюча сила і площа перерізу стержня невідомі → величину нормального напруження знаходимо по формулі:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{знаходимо}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.002 \text{ м}}{4 \text{ м}} = 0,0005 \quad \text{нормальне напруження}$$

$$\sigma = E * \varepsilon = 2 * 10^5 * 0,0005 \text{ Мн/м}^2 = 1000 \text{ кг/см}^2$$

IV (ст..26) При поздовжніх деформаціях бруса, одночасно із $l > m$ і $l < m$ довжини

змінюються розміри його поперечного перерізу < (розтяг) > (стиск)
Поперечні деформації прямо пропорційні поздовжнім.

$\Delta b = b - b_1$ – абсолютне поперечне вкорочення

$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}$ – відносне поперечне вкорочення.

$\mathcal{M} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ – коефіцієнт Пуасона

ε_1 – відносна поперечна деформація

ε – відносна поздовжня деформація при осьовому розтязі (стиску).

Взяті по абсолютній величині.

Задача

Сталева затяжка $d = 2\text{ см}$, розтягується силою $P = 50\text{ кН}$, $\mathcal{M} = 0,25$,
 $E = 2 * 10^5\text{ Мн/м}^2$. Визначити d після деформацій.

Розв'язок:

1. Визначити площу поперечного перерізу затяжки.

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 * 2^2}{4} = 3.14\text{ см}^2 = 3,14 * 10^{-6}\text{ м}^2$$

2. Визначаємо відносне видовження

$$\varepsilon = \frac{P}{EF} = \frac{0.05}{2 * 10^5 * 3.14 * 10^{-6}} \approx 0.0008$$

3. Визначаємо величину поперечного стискання затяжки

$$\varepsilon_1 = \mathcal{M} * \varepsilon = 0.28 * 0.0008 = 0.0002$$

4. Визначаємо величину абсолютного поперечного стиску

$$\Delta d = \varepsilon_1 d = 0.0002 * 2 = 0.0004\text{ см}$$

5. Діаметр перерізу затяжки після деформації.

$$d_1 = 2 - 0.0004 = 1.9996\text{ см.}$$

Поперечні деформацій, як бачимо дуже незначні, тому часто ними нехтуємо.

Тема 2.2 Розтяг і стиск

Зайняття №3

1. Механічні випробовування матеріалів. Діаграма розтягу пластичних і крихких матеріалів, їх механічні характеристики:
 - границя пропорційності;
 - текучості;
 - міцності.
2. Характеристики пластичних матеріалів і відносне залишкове видовження при розтязі і відносне залишкове звуження.
3. Поняття про умовну границю текучості.
4. Попередня витяжка металу за границю текучості. Поняття про наклеп. Явище повзучості. Фелоксації. Діаграма стиску.
5. Механічні характеристики деяких будівельних матеріалів.

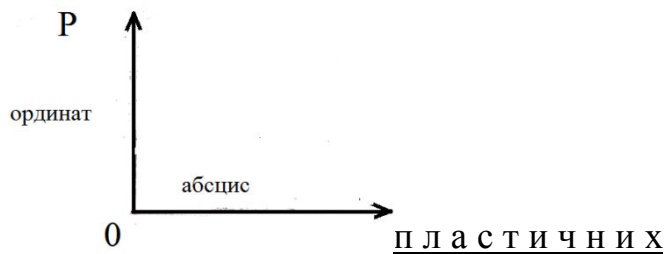


I
Матеріали → Пластичні, руйнуються після значної залишкової деформації.
 → Крихкі, руйнуються після дуже малих залишкових деформацій.
Залежно від умов може бути крихким пластичний стан матеріалів.

Випробування матеріалів на розтяг

Зразок сталюї (форми) закріплюють в захвати розривної машини, розтягують.
Спеціальні автоматичні пристрої викривлюють *діаграму розтягу*.

На діаграмі розтягу відкладають:

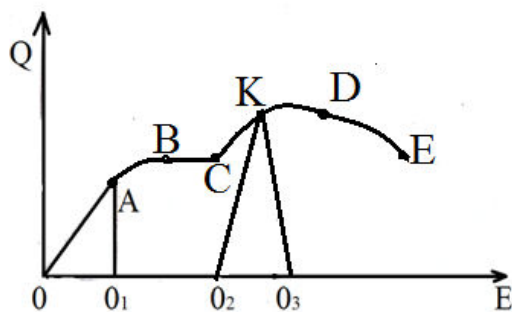


Δl (абсолютне видовження)

Для зручності.

$O_2 O_3 \rightarrow$ пружне видовження

$O O_2 \rightarrow$ залишкове видовження



Пряма OA графічно виражає закон Гука.

Від A до B деформації ростуть швидше напружень

Від B до C лінія горизонтальна – деформації ростуть без збільшення навантажень.

BC – площадка текучості.

σ в т. B – границя текучості ($\sigma_{т.}$)

Закон Гука діє – в межах ділянки пропорційності.

Покажіть границю (межу) міцності. Точка D (в ній найбільше навантаження) – границя міцності. Утворюється «шийка» – зразок рветься.

II Деформація виражена абсцисою OO_1 :

1. Відповідає напруженню – по величині границі пропорційності являється (упругою) пружною деформацією.
2. Зникає при знятті навантаження, якщо, зняти навантаження в т. K , то лінія розвантаження буде $K O_2$ $\parallel$ $OA \rightarrow$ в цьому випадку окрім пружного видовження $O_2 O_3$ зразок отримає залишкове видовження OO_2 . За (межами) границею пропорційності матеріалу відносна деформація складається з :
– пружної $\epsilon_{уп}$
– залишкової $\epsilon_{ост}$

$$\epsilon = \epsilon_{уп} + \epsilon_{ост}$$

Основні механічні характеристики пластичних матеріалів при осьовому розтягуванні і стисканні:

1. Границею пропорційності $\sigma_{пп}$ наз. найбільше напруження до якого деформації змінюються пропорційно напруженню.
2. Границею пружності $\sigma_{пр(уп)}$ наз. напруження при якому зразок отримає дуже малу залишкову деформацію (0,01 – 0,05% початкової довжини після малої)

3. Границею текучості σ_m наз. напруження деформації зразка ростуть без збільшення навантаження.
4. Границею міцності σ_{mc} наз. напруження, викликане найбільшим навантаженням на зразок за період дослідження у відношення до початкового поперечного перерізу.

III Для деяких матеріалів (дюралюміній, мідь, бронза) при розтягуванні дають діаграми без явно вираженої площадки текучості. Для таких матеріалів вводять поняття умовної границі текучості $\rightarrow$ напруження яке відповідає відносній залишковій деформації, $= 0,2\%$. Умовна границя текучості позначається $\sigma_{0,2}$.

Якщо границі текучості матеріалу при розтязі і стиску різні,

їх позначають $\sigma_{0,2(p)}$; $\sigma_{0,2(cж)}$; $\sigma_{T(p)}$; $\sigma_{T(cж)}$.

Такі матеріали наз. *крихко-пластичними*.

IV § 12 мал.14 стор.35 *Поняття про наклеп*

Досліди показують: якщо розтягнути зразок за границю текучості, а потім зняти навантаження, то (діаграма покаже) – пружна (упруга) частина видовження зникне – залишкове видовження буде мати певну величину (00_1). Якщо знову навантажити, то границя пропорційності і текучості підвищується в результаті попередньої витяжки матеріалу, його міцність збільшується (пластичність понижується).

Явище підвищення міцності матеріалу з одночасним пониженням пластичності в результаті попередньої витяжки його за границю текучості наз. **наклепом** – «закалкою».

Наклеп може мати позитивні і негативні сторони.

§ 11	Чистий стиск спостерігається коли довжина зразка не перевищує 5 стор.31-34.Кожного розміру поперечного перерізу інакше втрата стійкості і згин.
------	---

V таблиця № 3, стор.32

Тема 2.2 Розтяг і стиск

Зайняття №4

1. Методи розрахунку інженерних конструкцій.
2. Метод допустимих напружень : допустимі напруження і коефіцієнти запасу міцності по границі текучості і границі міцності.
3. Основні фактори, що впливають на його вибір. Умова міцності за даним методом.

I Конструкції будуть міцними, якщо напруження в усіх точках конструкції не будуть перевищувати **допустимих**.

Найбільше напруження, яке може бути допущено в перерізі елементу конструкцій для забезпечення його міцності наз. **допустимим**.

Напруження, яке виникає в конструкції від діючих навантажень наз. **дійсним**.

Розрахунок елементів конструкції полягає в тому, щоб визначити чи задовольняє дана конструкція, або її елементи вимогам надійності та міцності.

Для повної гарантії необхідно щоб всі елементи були міцні, жорсткі, стійкі.

Методи розрахунку на міцність:

1. Метод розрахунку по допустимим напруження (для деталей і механізмів)
2. Метод розрахунку по граничному стану (для елементів конструкцій будинків, інженерних споруд)

II Суть методу розрахунку по допустимим напруженням зводиться до *вимоги* щоб дійсне напруження в точках будь-якого поперечного перерізу елементу конструкцій не перевищувало допустимого напруження для даного матеріалу.

$$\text{Умова міцності} \quad \sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

1. Нормальне напруження в кожній точці перерізу бруса не повинно перевищувати допустимого напруження матеріалу.

Розрахунки зводяться до визначення однієї із невідомих вимогам за формулою $\sigma = \frac{N}{F}$.

1. Дано: 1) розміри поперечного перерізу або F;

2) величини поздовжньої сили N

Визначити: σ_{max} в перерізі.

Розв'язок

- Визначаємо $\sigma_{max} = \frac{N}{F}$
- Порівнюємо з допустимим $\sigma_{max} \leq [\sigma]$, якщо $\sigma_{max} \geq [\sigma]$, тоді
 1. Збільшуємо площу поперечного перерізу
 2. Зменшуємо навантаження

$\sigma_{дійсне}$ допускається $>$ або $<$ $\mp 5\% [\sigma]$

2) Дано: N в перерізі, $[\sigma]$

Визначити: F (тобто підібрати переріз)

Розв'язок

$$-F \geq \frac{N}{[\sigma]}; \sigma = \frac{N}{F}, \text{ звідси } \sigma_{max} \leq [\sigma]$$

3) Дано : F , розміри поперечного перерізу
 $[\sigma]$

Визначити: N_{max} –?

Розв'язок

$$\left[\sigma = \frac{N}{F} \right] \quad \sigma_{max} \leq [\sigma] \quad [N] = [\sigma]F$$

Задача $\rightarrow$ Зайняття №1

Що таке допустиме напруження?

$[\sigma]$ – це якась частина від границі міцності, або границі текучості $\sigma_{мц}$, $\sigma_{т}$.

Число, яке показує, в скільки раз допустиме напруження менше границі міцності або границі текучості наз. коефіцієнтом запасу міцності і позначається K або n .

Допустиме напруження по границі міцності для крихких матеріалів (по діаграмі розтягу) $[\sigma] = \frac{\sigma_{мц}}{K_1}$

Для пластичних матеріалів небезпечне напруження приймається по $\sigma_{т}$ границі текучості.

$$[\sigma]_p = [\sigma]_{сж} = \frac{\sigma_T}{K_2}$$

1. Для яких матеріалів коефіцієнт запасу міцності більший крихких чи пластичних, однорідних чи не однорідних при статичному навантаженню чи динамічному?

Домашнє завдання!

Задачі ст..43

§ 16 ст.41

Тема 2.2 Розтяг і стиск

Зайняття №5

Розв'язування прикладів з використанням умови міцності при розтязі(стиску) по допустимим напруженням(три види розрахунків)

1. Метод граничного стану. Граничний стан конструкцій.
2. Коефіцієнти безпечності по матеріалу, перевантаження умов роботи (надійності).
3. Нормативні і розрахункові навантаження, нормативний і розрахунковий опір.
4. Розрахункова формула по граничному стану при розтязі і стиску.
5. Розрахунки по граничному стану і порівняння одержаних результатів з розрахунком по допустимим напруженням.

I § 64 ст.228 По несущей способности или по предельным состояниям.

$$R = \frac{N}{A} \leq mR^H$$

A — площа

$$R = mR^H$$

m — коефіцієнт умови роботи

$$F = \gamma F^H$$

γ — коефіцієнт надійності

1. До 1939р. основним методом розрахунку будівельних конструкцій являвся метод по допустимим напруженням.(розроблений в ХІХ ст.)
Метод розрахунку по допустимим напруженням виходить з припущення, що тіло ідеально пружне:

- Не враховує дійсних властивостей будівельних матеріалів (матеріали пружно пластичні)
- Не враховує фактичних умов роботи будівельних матеріалів і конструкцій під навантаженням.

В багатьох випадках дійсна міцність $\approx$ на 50 % вища допустимої. Метод $[\sigma]$ ґрунтується на єдиному постійному $K_{міц}$ запасу міц. не задовольняє вимогам $K = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}$ рівно міцних споруд. В одних випадках, міцність завищена, в інших занижена.

З 1939 р. розроблений метод розрахунку по руйнуючим навантаженням, для бетону залізобетону, кам'яна і армованих конструкцій.

Суть методу:

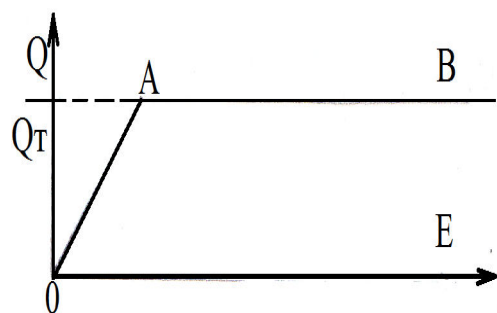
$$p_{max} \leq [p]_{max}$$

Фактичне тах навантаження $\leq$ допустиме_{тах}

$$[P] = \frac{P_{руйн.}}{K} \quad \frac{руйнуюче(розруш)}{K \text{ запасу міц.}}$$

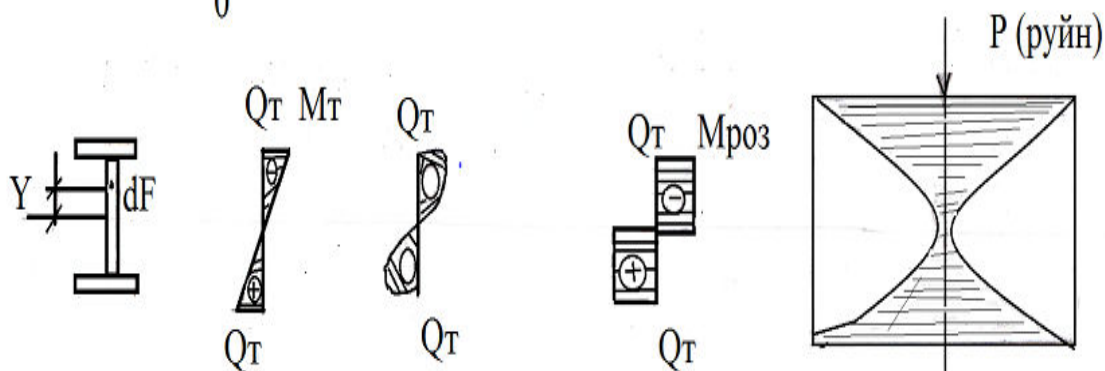
Руйнуюче навантаження – таке навантаження при якому подальша експлуатація к-ціє неможлива.

Розрахунки по методу руйнуючих навантажень ґрунтується на допущенні, що матеріал елементів конструкцій має ідеальні пружно-пластичні властивості.



Матеріал :
 OA – ідеально пружний
 AB – ідеально пластичний.

Розглянемо сталю двотаврову балку



При збільшенні навантажень до P руйнівного напруження зростають до $[\sigma_{T max}]$

Досконалим і прогресивним методом розрахунку будівельних конструкцій являється метод граничного стану.

Граничний – такий стан при якому конструкція чи споруда перестає задовольняти експлуатаційним вимогами або вимогам при їх спорудженні.

Існує 2 групи граничного стану:

$$[P] = \frac{P}{K} \quad \text{I – по втраті несучої здатності розрахунок по міцності і стійкості}$$

(експлуатувати неможна)

$$P_p = \gamma_\phi P^H$$

$$F_p = \gamma_\phi F^H$$

$$N=P=F$$

F – Зовнішнє навантаження

F^H – Нормативне розрахункове(допустиме)

γ_ϕ – коефіцієнт надійності(перевантаження), як правило >1 (1,1–1,5)

–(задане P^H)

R_p, N_p, F_p – розрахункове навантаження, те по кому ведемо розрахунок.

$$R = \frac{N_p}{A} \leq \gamma_c R^p \quad \text{– умова міцності}$$

$$A = \frac{N_p}{\gamma_c R}$$

$$R^p = \frac{R^H}{K}$$

R – ст.232

γ_c – коефіцієнт умовної роботи

R- дійсний

R^p – розрахунковий опір матеріалу

R^H – нормативний опір матеріалу

K– коефіцієнт безпеки по матеріалу

$$N \leq \gamma_c R * A$$

A– площа

II По нездатності до нормальної експлуатації – розрахунок по тріщиностійкості і деформаціям (визначення прогинів і кутів повороту)

Улитин ст..233

$$R = \frac{N_p}{A} \leq \gamma_c R^p$$

$$R^p = \frac{R^H}{K}$$

R– дійсний опір, який виникає від N

Ст..233,табл. 13,14 $\longrightarrow$ R^p (розрах)

$\gamma_c = 0,8-1$ – коефіцієнт умови роботи (m)

Улитин ст.232

Задача 2.334

На цегляний стовп в підвальному приміщенні діють 2 осьові сили: + перекриття

1. – власна вага – нормативне постійне навантаження $G^H = 920 \text{ кН}$

2. Корисне навантаження – тимчасове $P^H = F^H = 300 \text{ кН}$

3. Висота стовпа $H=2,3 \text{ м}$

4. Розрахунковий опір кладки $R_{\text{кл}} = 1,4 \text{ Мн/м}^2$

Знайти: поперечні розміри

Розв'язок

1. Із СНІП беремо коефіцієнт перевантаження (надійності) :

– для постійного $\gamma_{\text{фп}} 1,1$

– для тимчасового $\gamma_{\text{ф вр}} = 1,4$

2. Визначаємо розрахункову поздовжню силу

$$F_p = G^H * \gamma_{\text{фп}} + F^H * \gamma_{\text{ф вр}} = 920 * 1,1 + 300 * 1,4 = 1432 \text{ кН} = 1,432 \text{ Мн.}$$

$$\text{Записуємо умову міцності } \sigma \leq [\sigma] \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

3. I група граничного стану – розрахунок по міцності:

$$R = \frac{N}{A} \leq \gamma_c * R$$

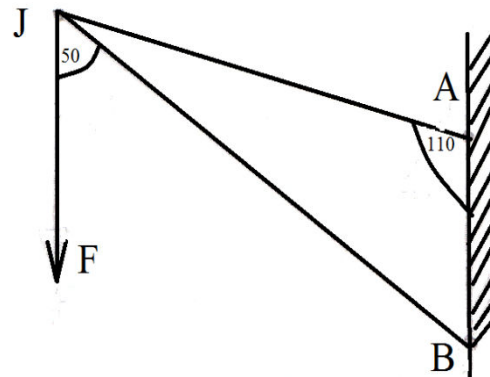
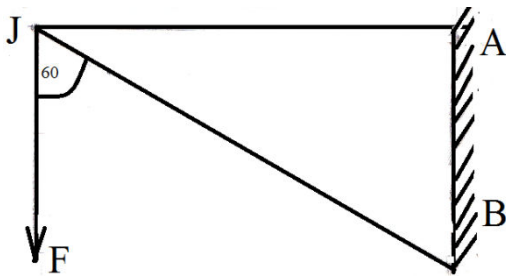
γ_c – коефіцієнт умови роботи (m)

4. Визначаємо площу:

$$A \geq \frac{N_p}{\gamma_c R}$$

$A = \frac{1.432}{1 * 1.4} = 1.03 \text{ м}^2$. Приймаємо стовп квадратним і знаходимо його сторону: $a = \sqrt{1.03} \approx 1,0 \text{ м}$. Якщо відношення висоти стовпу до сторони поперечного перерізу $\frac{H}{a} = \frac{2,3}{1,0} = 2,3 < 4$ – то згідно Б н і п вплив поздовжнього згину не враховується.

Задача 2.336



Підібрати поперечний переріз стержня АС кронштейну з 2х сталевих рівнополочних кутників від дії сили F, яка складається з:

– постійної $F_n = 10 \text{ кН}$

– тимчасової $F_{вр} = 30 \text{ кН}$

$\gamma_{фп} = 1,1$; $\gamma_{фв} = 1,4$

$\varphi_c = 0,9$; $R = 210 \text{ МН/м}^2 \text{ (ст.3)}$

Розв'язок

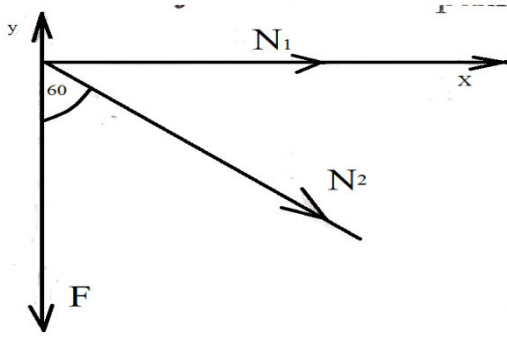
1. Визначаємо розрахункове навантаження

$$F_p = 10 * 1,1 + 30 * 1,4 = 53 \text{ кН.}$$

2. Розрахунок по міцності (умова міцності)

$$\frac{N}{A} \leq \gamma_c R$$

3. Знаходимо зусилля в стержнях



$$\sum x = 0$$

$$N_1 + N_2 * \cos 30 = 0$$

$$N_1 = -106 * 0.87 = -92.2 \text{ кН}$$

$$\sum y = 0$$

$$-F - N_2 * \cos 60 = 0$$

$$N_2 = -\frac{F}{\cos 60} = \frac{53}{0.5} = 106 \text{ кН}$$

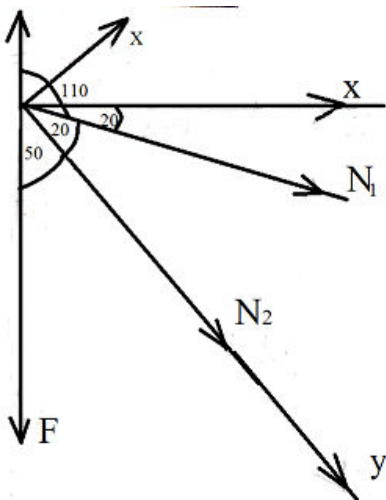
4. Знаходимо площу стержня АС

$$A \geq \frac{N_1}{\gamma_c R} = \frac{92.2}{210 * 0.9} = 0.00049 \text{ м}^2$$

5. Підбираємо поперечний переріз.

Розміри 63х4; N профілю 6,3

Самостійно



$$\sum x = 0$$

$$N_1 * \cos 20 + N_2 * \cos 40 = 0$$

$$N_1 = -\frac{N_2 \cos 40}{\cos 20}$$

$$\sum y = 0$$

$$-F - N_2 * \cos 50 - N_1 \cos 70$$

$$N_2 = -\left(\frac{F + N_1 \cos 70}{\cos 50}\right)$$

$$\sum x = 0$$

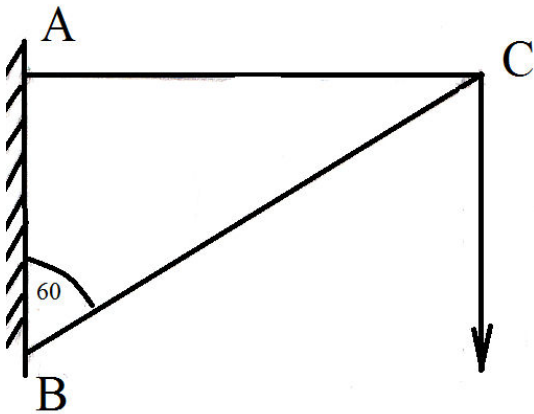
$$F * \cos 50 + N_1 * \cos 20 = 0$$

$$N_1 = -F \frac{\cos 50}{\cos 20}$$

Розрахункова – графічна робота: « Побутова епюри поздовжніх сил й нормальних напружень».

Домашнє завдання!
Ст..124, № 2,39
№2,41,
2,40– графічна робота

С а м о с т і й н о.
I,III в.

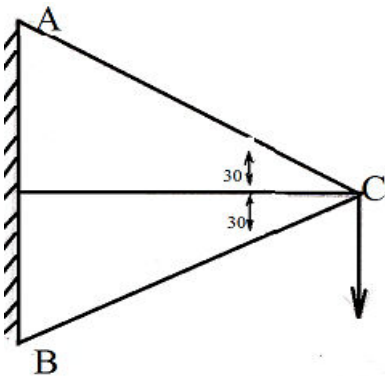


$$P^H = P_{\Pi}^H + P_p^H$$

$$P_n^H = 150 \text{ кН} \quad P_n^H = 180 \text{ кН}$$

$$\gamma_{\phi\Pi} = 1,1$$

II,IV в.



$$\gamma_{\phi\Pi}=1,4$$

$$\varphi_c=0,9$$

$$R_{\text{ст3}} = 210 \text{ МН/М}^2$$

$$P^H = P_{\Pi}^H + P_p^H$$

Підібрати поперечний переріз стержню $I_{\text{в AC}}, III_{\text{в BC}} \quad I$

$II_{\text{в AC}}; IV_{\text{в BC}} \quad 2$

Із 2х сталевих швелерів. + диктант.

Тема 2.3 . Практичні розрахунки на зріз і зм'яття.

Зайняття №6

1. Зріз і зм'яття, основні розрахункові формули і припущення.
2. Допустимі напруження на зріз і зм'яття.

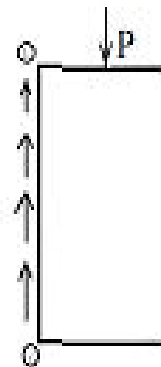
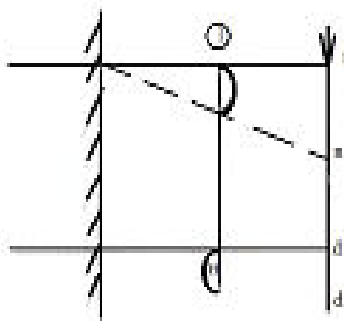
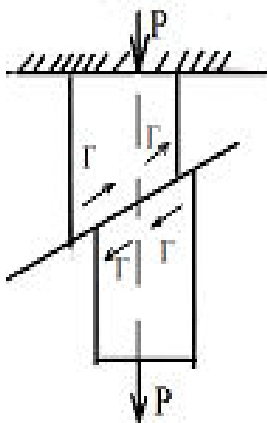
$$\sigma = \varepsilon E \text{ — закон Гука } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

3. Найпоширеніші розрахунки по граничному стану і порівняння одержаних результатів з розрахунками по допустимим напруженням.

Зріз

Розтяг і стиск супроводжується зсувом(зрізом).

Розглянемо деформації і напруження при зсуві (зрізі)



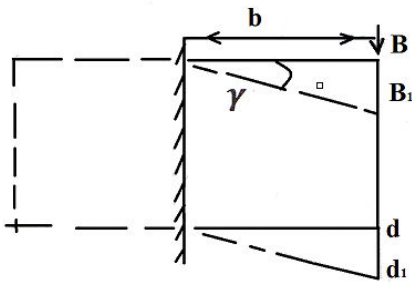
Під дією сили P кожний поперечний переріз бруса зсувається відносно сусіднього вниз

$b - b_1$ і $d - d_1 \longrightarrow$ абсолютний зсув (a)

Величини $b - b_1$ і $d - d_1$ залежить від h

Відношення величини абсолютного зсуву

bb_1 до віддалі ab називають **відносним зсувом**.



$$\frac{bb_1}{ab} = \operatorname{tg} \gamma$$

Відріжемо брус перерізом 1-1 і дію відкинутої частини замінимо внутрішніми силами. Вони розташовані в площі перерізу і являються дотичними напруженнями.

Допускається, що дотичні напруження розподілені по перерізі рівномірно.

Величину дотичних напружень при зсуві можна визначити за формулою:

розрахунок на зсув $\tau = \frac{P}{A}$ аналогічно $\sigma = \frac{P}{A}$ розрахунок на розтяг(стиску)

дає середні значення дотичних напружень.

Площа A II силі;

Площа A I силі.

Абсолютний зсув визначається за формулою:

$$a = \frac{P * h}{G * A}$$

$$\frac{1}{G} - \text{коефіцієнт пропорційності}$$

так, як $\frac{P}{A} = \tau$; $\frac{a}{h} = \gamma$, тоді

$$\frac{a}{h} = \frac{\tau * h}{G * h}; \quad \frac{a}{h} = \gamma, \quad \text{тоді}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad \text{або} \quad \tau = \gamma * G$$

$$\tau = G\gamma - \text{закон Гука при зсуві}$$

G- модуль зсуву; $G = \frac{H}{\text{м}^2}; \frac{\text{Мн}}{\text{м}^2}$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad \text{де}$$

E- модуль поздовжньої пружності

$\mathcal{M}$ – коефіцієнт Пуансона

Розрахунки на зсів застосовуються

1. для перевірки міцності конструкцій, які служать для з'єднання окремих елементів системи;
2. для підбору їх перерізу на зріз такими являється:
 - зварні з'єднання
 - заклепочні
 - гвинтові
 - балки на шпонках, на клеях
 - дерев'яні в рубки

При розрахунках повинна використовуватись умова : щоб діюче напруження не перевищувало допустимого

$$\tau = \frac{P}{A} \leq [\tau]$$

На зріз заклепок : $A = \frac{\pi d^2}{4}$ d - діаметр заклепки

На зм'яття : $A = d * \delta$ δ – товщина листа, яким з'єднується, якщо δ різні, береться менша.

З м ' я т т я – різновидність деформації стиску, при дії сили на невеликій площі конструкції.

Виникаючі при цьому напруження називаються **напруженнями зм'яття**.

$$\sigma_{\text{дм}} = \frac{P}{A} \leq [\sigma_{\text{дм}}] \longrightarrow$$

розрахункове рівняння зм'яття.

Р о з р а х у н к и

$$\tau_{\text{зріз}} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau] \quad (\text{для заклепок})$$

звідси, кількість заклепок

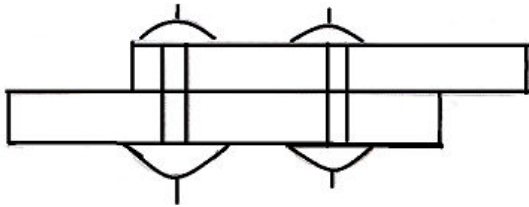
$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} * \tau_{\text{закл}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi n * \tau_{\text{закл.}}}}$$

ст.82

При n заклепок, на кожну з них буде діяти сила $P_1 = \frac{P}{n}$ (всі заклепки напружені $\approx$ однаково)

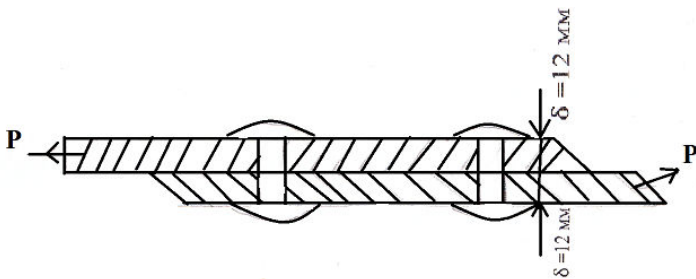
Напруження в заклепці:



$$\tau = \frac{P_1}{F}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}}$$

З а д а ч а



2 сталіх листки, шириною
 $B=240\text{мм}$ і $\delta=12\text{ мм}$ (товщиною)
 $d_{\text{закл}} = 23\text{ мм}$ $P=250\text{ кН}$

напруження на зріз $[\tau] = 100 \text{ Мн/м}^2$

на зм'яття $[\sigma_{зм}] = 240 \text{ МН/м}^2$

на розтяг листів $[\sigma] = 160 \text{ МН/м}^2$

Визначити: кількість заклепок, перевірити напруження в ослаблених перерізах.

Р о з в ' я з о к

1. Кількість заклепок на зріз

$$n_{\text{зріз}} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{0.250 * 4}{3.14 * (0.023)^2 * 100} \approx 6$$

2. Кількість заклепок на зм'яття

$$n_{\text{зм}} = \frac{P}{d\delta [G_{зм}]} = \frac{0.250}{0.023 * 0.012 * 240} \approx 3.8$$

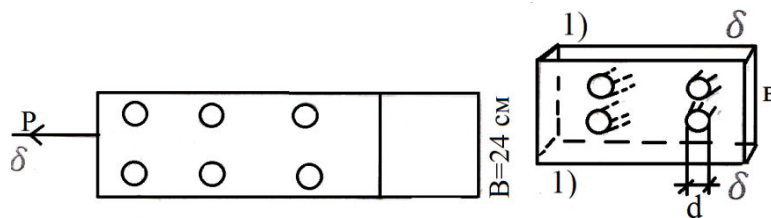
приймаємо 4 закладки

приймаємо більшу кількість заклепок – на зріз, 6 штук і розташовуємо їх в 2 ряди.

3. Перевіряємо напруження в ослабленому перерізі листів

3.1. визначаємо площу ослабленого перерізу

$$F_{\text{нт}} = b * \delta - n * d * \delta = 24 * 12 - 3 * 2.3 * 1.2 = 20.52 \text{ см}^3 = 20,52 * 10^{-4}$$
$$F_{\text{нт}} = b\delta - 3 * d$$



Перевіримо величину напруження в ослабленому перерізі листів

Площу ослабленого перерізу

$$F_{\text{нт}} = 20.52 * 10^{-4} \text{ м}^2$$

4. Найбільше напруження в листа

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{нт}}} = \frac{0,250 \text{ МН}}{20,52 * 10^{-4} \text{ м}^2} = 122 \text{ МН/м}^2 < 160 \text{ МН/м}^2$$
$$(1220 \text{ кг/см}^2 < 1600 \text{ кг/см}^2)$$

Відповідь: прийнято 6 закладок. Напруження в ослабленому перерізі не перевищує допустимого.

Тема 2.4. Геометричні характеристики плоских перерізів.

Зайняття №7

1. Поняття про геометричні характеристики плоских перерізів бруса і їх зв'язок з різними видами деформації.
2. Моменти інерції: осьовий (екваторіальний), полярний і відцентровий.
3. Зв'язок між осьовими моментами інерції відносно паралельних осей.
4. Головні осі інерції і головні центральні моменти інерції.
5. Визначення головних центральних моментів інерції, складених перерізів, що мають вісь симетрії застосування таблиць нормального сортаменту.

Н.С. Улитин §27-§30(ст.87)

1.Що являється геометричною характеристикою перерізу при розтязі і стиску ?

—> A – площа поперечного перерізу.

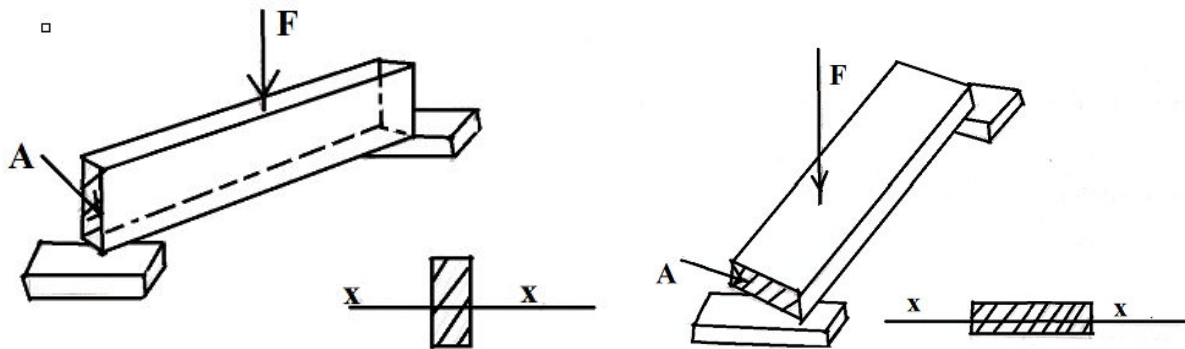
2. таке жорстка балка – якщо вона мало прогинається , (здатна опір чинити деформаціям)?

3. Що таке гнучка балка, якщо прогинається на значну величину.?

Геометричною характеристикою при згині балки в опорі матеріалів являється:

- Момент інерції;
- Площі перерізу.

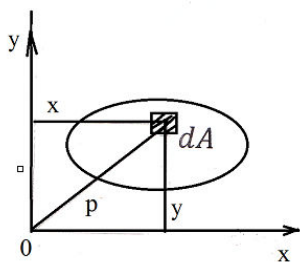
Позначається J



Мал..54

В першому випадку балка більш жорстка, витримує більше навантаження і менше прогнеться.

J або (γ) – момент інерції площі перерізу



$$S_x = \int_A y dA \text{ [см}^3\text{]; [мм}^3\text{]}$$

$$S_y = \int_A x dA \text{ [м}^2\text{]}$$

Мал..55

Із статyki відомо, що статичні моменти площі плоского перерізу відносно будь-якої осі, що лежить в одній площині є добуток площі перерізу на відповідну координату центру ваги.

$$S_x = A * y_c; \quad S_y = A x_c$$

Звідси положення центру ваги перерізу:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}$$

Якщо осі x і y будуть проходити через центр ваги, тоді

$x_c = 0$ і $y_c = 0$, відповідно $S_x = 0$ і $S_y = 0$, тобто статичний момент перерізу відносно центральних осей $= 0$.

Момент інерції – характеризує жорсткість балки, здатність опиратись деформації.

Осьовим або екваторіальним моментом інерції плоского перерізу відносно будь-якої осі, що лежить в тій же площині називається сума добутків елементарних площадок dA на квадрати їх відстаней до даної осі.

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad (53)$$

$$J_y = \int_A x^2 dA \quad (54)$$

Молярним моментом інерції перерізу J_p відносно будь-якого полюса O наз. сума добутків елементарних площадок dA на квадрат їх віддалі p до полюса:

$$J_p = \int_A p^2 dA \quad (55)$$

Так, як $p^2 = x^2 + y^2$, то

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x$$

$$J_p = J_x + J_y$$

Одиниці вимірювання. $[м^4]$, $[см^4]$, $[мм^4]$

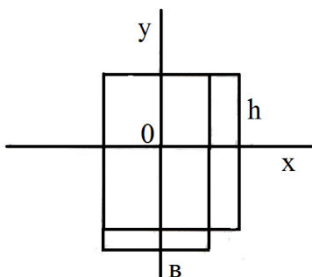
Величини осьових і полярних моментів інерції завжди додатні.

Відцентровим моментом інерції плоского перерізу відносно осей x і y наз. сума добутків елементарних площадок dA на їх координатах X і Y .

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad [см^4]$$

Відцентрові моменти інерції можуть бути і $+$ і $-$ і 0 .

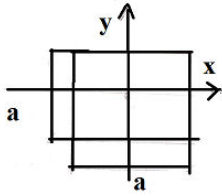
Осьовий момент інерції прямокутника



$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

В якому випадку буде більший J_x чи J_y ? Коли більший опір деформаціям.

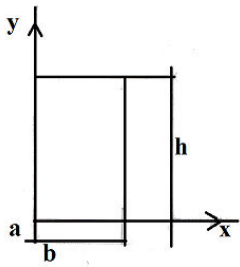


Квадрата

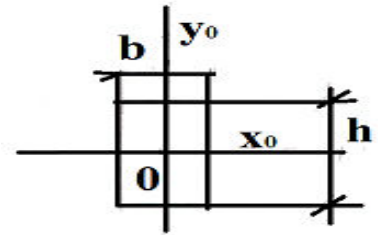
$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$$

$$J_x = J_y$$

Відцентровий момент інерції прямокутника.



$$J_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$$



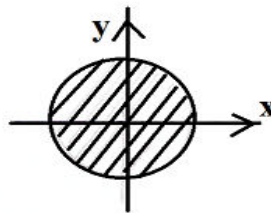
в випадку

$$J_{x_0 y} = J_{y_0 x} = 0$$

Коли осі x_0, y_0 проходять через центр ваги.

Осі відносно яких відцентровий момент інерції $= 0$ називають **головними осями інерції**.

Моменти інерції кола

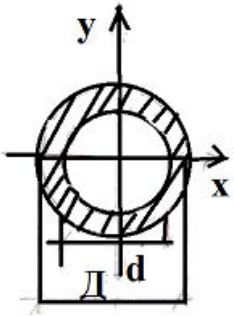


полярний $J_p = \frac{\pi \tau^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1 d^4$

осьовий $J_x = J_y$, так як $J_p = J_x + J_y$; $\rightarrow J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = 0.05d^4$$

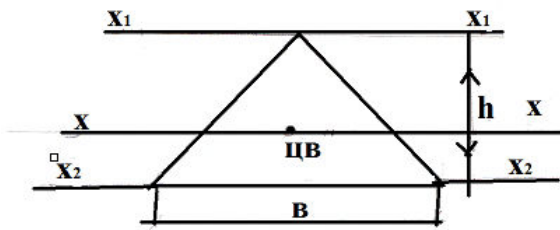
Осьовий момент інерції кільцевого перерізу



$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0.05(D^4 - d^4)$$

$$J_x = J_y \approx 0.05(D^4 - d^4)$$

Осьовий момент інерції трикутника

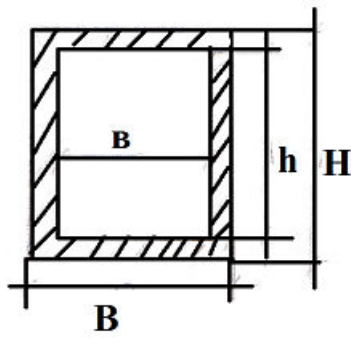


$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$$

$$J_{x_2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}$$

Осьовий J коробчастого перерізу



$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$

Якщо в підінтегральний вираз осьового моменту інерції замість y^2 і x^2 підставити значення i_x^2 і i_y^2 то отримаємо

$$J_x = \int_A i_x^2 dA$$

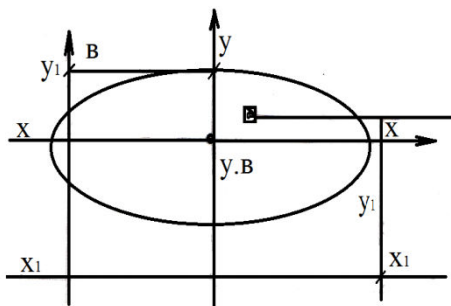
$$J_y = \int_A i_y^2 dA$$

де i_x і i_y – радіуси інерції перерізу

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

IV Головні осі інерції і головні центральні моменти інерції.

Осі, які проходять через центр ваги перерізу наз. **центральними осями**, а моменти інерції відносно них – центральними моментами інерції.



$$J_{y_1} = J_y + b^2 A$$

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A$$

Щоб визначити J відносно будь-якої осі, необхідно знати залежність між моментами інерції цього перерізу відносно 2^x осей x і x_1 , одна з яких являється центральною.

Моменти інерції площі перерізу відносно будь-якої осі = моменту інерції відносно центральної осі + добуток площі перерізу на квадрат віддалі між осями.

Аналогічно можна записати формули для осьового і відцентрового моментів інерції.

$$J_{y_1} = J_y + a_1^2 A$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + a a_1 A, \text{ де } a \text{ і } a_1 - \text{ віддалі від осей } X \text{ і } Y \text{ до осей } X_1 \text{ і } Y_1$$

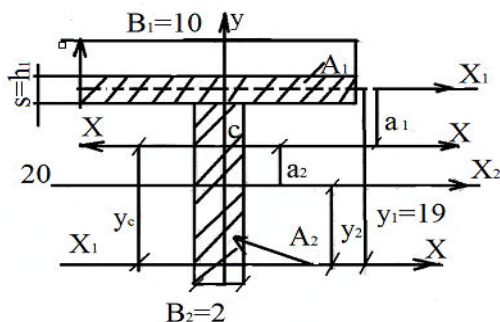
J_x – момент інерції площі перерізу відносно осі x .

Вісь x – x проходить через центр ваги всієї фігури (але не проходить через центр ваги I і II фігури) і проходить на відстані a_1 від центру ваги I фігури a_2 – від II.

$$J_x = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 * F_1 \right) + \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 F_2 \right) = \frac{10 * 2^3}{12} + 6.5^2 * 20 + \left(\frac{2 * 18^3}{12} + 3.5^2 * 36 \right) = 2260 \text{ см}^4$$

$$J_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_1^2 * b_1^3}{12} = \frac{2 * 10^3}{12} + \frac{18 * 2^3}{12} = 180 \text{ см}^4$$

З а д а ч а



Визначити центральні моменти інерції J_x і J_y таврового перерізу $a_1 = 6.5 \text{ см}$; $a_2 = 3.5 \text{ см}$

Р о з в ' я з о к

1. Розбиваємо переріз на 2 прямокутники. Так як переріз має вісь симетрії y - y , то необхідно знайти тільки ординату y_c .

2. Визначаємо площі:

$$A_1 = 10 * 2 = 20 \text{ см}^2; \quad A_2 = 18 * 2 = 36 \text{ см}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 20 + 36 = 56 \text{ см}^2$$

вибираємо відлікові осі

3. Визначаємо статичні моменти відносно осі x_1 – x_0

$$S_{x_1} = A_1 y_1 + A_2 y_2 = 20 * 19 + 36 * 9 = 704 \text{ см}^3$$

4. Ордината центру ваги

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{704}{56} = 12.5 \text{ см}$$

5. Визначаємо центральні моменти інерції перерізу

$$J_x = \left(\frac{bh^3}{12} + a_1^2 A_1 \right) + \left(\frac{bh^3}{12} + a_2^2 A_2 \right) = \frac{10 * 2^3}{12} + 6.5^2 * 20 + \frac{2 * 18^3}{12} + 3.5^2 * 36 = 2260 \text{ см}^4$$

$$J_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{2 * 10^3}{12} + \frac{18 * 2^3}{12} = 180 \text{ см}^4$$

a_1 і a_2 — віддалі між осями

Тема 2.5 Зсув і кручення брусів круглого перерізу.

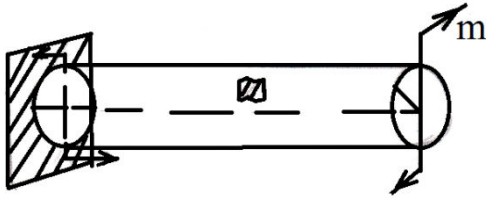
Поняття про чистий зсув.

Зайняття № 8

Повторити § 24-§28 (ст.73)
§80 ст.172

1. Деформація зсуву. Модуль зсуву. Зв'язок між трьома пружинами постійними для ізотропного тіла (без виведення). $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$
2.
 - Кручення прямого бруса круглого перерізу.
 - Скручуючий і крутячий моменти.
 - Побудова епюр крутячих моментів.
 - Напруження в поперечному перерізі круглого бруса. Кут закручення.
 - Полярний моменти опору для круга і кільця.
 - Розрахунок валів на міцність і жорсткість.

Кручення



m – скручуючий момент

Якщо до вільного кінця замурованого бруса (круглого) прикладена пара сил з моментом m , який діє в площині перпендикулярно до осі бруса – виникне деформація кручення.

Момент пари, який скручує брус називається **скручуючим моментом**.
Досліди показують при крученні залишаються :

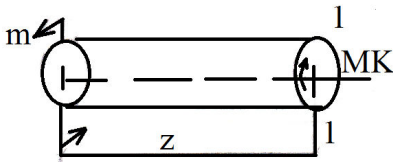
- Вісь – прямою;
- Торець – плоским;
- Радіуси – незмінними;
- Віддаль між поперечними перерізами – незмінна.

Квадрати нанесені на поверхні бруса до кручення – після кручення – однакові.

Висновок: Кожен елемент на поверхні і в середині отримує чистий зсув і в поперечному перерізі бруса виникають тільки дотичні напруження.

Кут повороту навколо осі називається **кутом закручування**. (θ) – тета

Для визначення внутрішніх сил в перерізі бруса, який скручується застосовують **метод перерізів**.



1. Перетнемо брус площиною 1-1 перпендикулярно до осі на віддалі z від замурованого кінця.
2. Відкинемо праву частину.
3. Дію відкинутої частини заміняємо внутрішніми зусиллями – МК (які зрівноважують зовнішні)

Момент внутрішніх сил, який діє в площині поперечного перерізу бруса називається **крутним моментом** (МК).

Розрахунки на кручення виконують для валів машин

- Осей рухомого складу
- Пружин
- Для деяких елементів цивільних і промислових будинків.

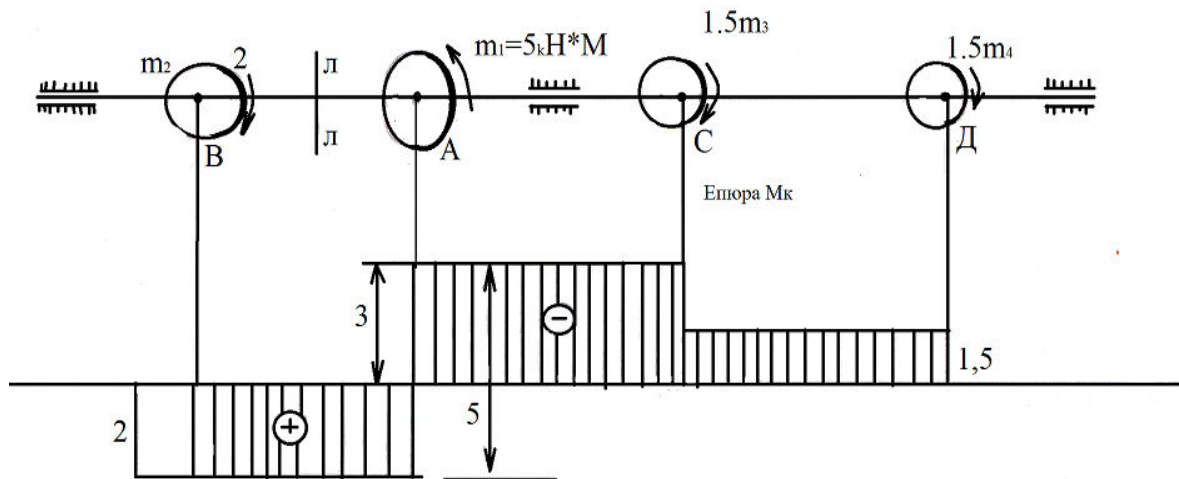
Для визначення кручення моментів по довжині валу будують епюру крутних моментів.

Крутний момент в будь-якому перерізі бруса по числовому значенню дорівнює алгебраїчній сумі скручуючих моментів, які діють на брус по одну сторону від перерізу.

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \text{ – рівняння рівноваги.} \quad (1)$$

З а д а ч а

Побудувати епюру крутних моментів для трансмісійного валу (трансмиссия – передача) (ст.174–204)



$$M_k(AC) = 2 - 5 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_k(CD) = 2 - 5 + 1,5 = -1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Повний момент внутрішніх дотичних сил відносно бруса



$$M_k = G * \frac{d\theta}{dz} * \gamma r, \text{ де}$$

Ст.175

G – модуль зсуву, залежить від пружності матеріалу
 γr – полярний момент інерції площі перерізу.

Кут в радіанах (рад)

$$\theta = \frac{M_k * l}{G \gamma r} - \text{кут закручування тета.}$$

$G \gamma r$ – жорсткість перерізу бруса при крученні.

Кут в градусах:

$$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} * \frac{M_k l}{G J_p}$$

J_p – полярний момент інерції

Дотичне напруження

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} * p$$

коли $p=r$

$$\tau = \max$$

p – віддаль від центру до будь-якої точки.

$$\frac{J_p}{\rho_{\max}} = W_p - \text{полярний момент опору перерізу бруса}$$

Для круга – $W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 0.2d^3$

Полярний момент інерції для круга – $J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1d^4$

Для кільця – $J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \approx 0.1(D^4 - d^4)$

Для кільця – $W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx 0.2 \frac{(D^4 - d^4)}{D}$

Умова міцності:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau] \quad (\text{ст. 177 – ф – ли})$$

Задача №1

Провірити на міцність (полий) пустотний вал.

Дано: $D=10$ см;

$d=6$ см ;

$M_k = 0.01$ Мн * м;

$[\tau] = 60 \text{ Мн/м}^2 = 600 \text{ кг/см}^2$

Розв'язок

$$W_p = 0.2 \frac{D^4 - d^4}{D} = 0.2 \frac{10^4 - 6^4}{10} = 174 \text{ см}^3 = (1.74 * 10^{-4} \text{ м}^3)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{0.01}{1.74 * 10^{-4}} = 57.3 \text{ Мн/м}^2$$

Міцність забезпечена

Задача № 2

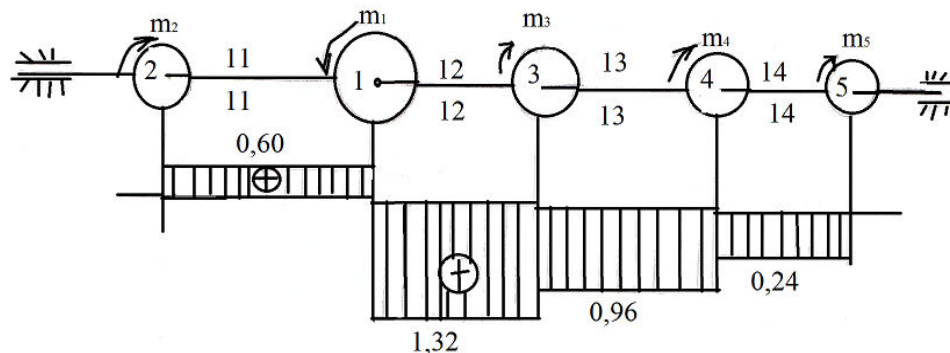
На вал $d=60$ мм насаджено 5 шківів: шків 1 – ведучий, решта водимі (ведомые)

$m_1 = 1.92 \text{ кН * м}$; $m_2 = 0.60 \text{ кН * м}$; $m_3 = 0.36 \text{ кН * м}$; $m_4 = 0.72 \text{ кН * м}$;

$m_5 = 0.24 \text{ кН * м}$

Визначити $\tau_{\max}$? (θ ?)

Розв'язок



1. Будуємо епюри крутних моментів. Методом перерізів.

– в перерізі

1-1 $M_k = m^2 = -0.6 \text{ кН * м}$

2-2 $M_k = -0.60 + 1.92 = 1.32 \text{ кН * м}$

$$3-3 \quad M_K = -m_2 + m_1 - m_3 = 1.32 - 0.36 = 0.96 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$4-4 \quad M_K = -m_2 + m_1 - m_3 - m_4 = 0.24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Визначаємо максимальний крутний момент

$$M_{max} = 1.32 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1,32 * 10^{-3} \text{ МН}.$$

$$2. \quad \tau = \frac{M_{max}}{W_p}, \text{ для круга}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 0.2 d^3 = 0.2 (0.06)^3 \text{ м}^3$$

$$W_p = 0,0000432 \text{ м}^3 = 4,32 * 10^{-5} \text{ м}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{0.00132}{0.0043} = \frac{1.32 * 10^{-3}}{4.32 * 10^{-5}} = 30.5 \text{ МН/м}^2$$

$$\theta = \frac{180^\circ M_K * l}{\pi G * J_p}$$

$$l = 3$$

$$J_p = \frac{W_p}{p_{max}}$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1 d^4$$

$$G = 8 * 10^4 \text{ МН/м}^2$$

§50-52